第 3 节 比较大小的高阶方法（★★★）

强化训练

1．（★★）设 $a=\log_5 6$，$b=\log_7 8$，则 a_____b.（填“>”或“<”）

答案：>

解析：a 和 b 底数不同，先用换底公式化同底，由题意，$a=\log_5 6=\dfrac{\ln 6}{\ln 5}$，$b=\log_7 8=\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$，

此时发现 a，b 分母比分子小，可考虑先取倒数，再用糖水不等式化为分母相同的形式比较，

所以 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{\ln 5}{\ln 6}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\ln 7}{\ln 8}$，由糖水不等式，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\ln 5}{\ln 6}<\dfrac{\ln 5+\ln\dfrac{8}{6}}{\ln 6+\ln\dfrac{8}{6}}=\dfrac{\ln\dfrac{20}{3}}{\ln 8}<\dfrac{\ln 7}{\ln 8}=\dfrac{1}{b}$，结合 a，b 均为正数知 $a>b$.

2．（2022•新高考Ⅰ卷•★★★）设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<b<a$　　（C）$c<a<b$　　（D）$a<c<b$

答案：C

解析：观察发现 a，c 可用泰勒展开式来近似计算，故先近似计算，再比较大小，

由内容提要 2，$\mathrm{e}^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$，所以 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}\approx 0.1(1+0.1+\dfrac{0.1^2}{2}+\dfrac{0.1^3}{6})\approx 0.1105$，

$\ln(1+x)\approx x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$，所以 $c=-\ln 0.9=-\ln[1+(-0.1)]\approx -[-0.1-\dfrac{1}{2}\times(-0.1)^2+\dfrac{1}{3}\times(-0.1)^3]\approx 0.1053$，

又 $b=\dfrac{1}{9}\approx 0.1111$，所以 $c<a<b$.

3．（2022•全国甲卷•★★★★）已知 $a=\dfrac{31}{32}$，$b=\cos\dfrac{1}{4}$，$c=4\sin\dfrac{1}{4}$，则（　　）

（A）$c>b>a$　　（B）$b>a>c$　　（C）$a>b>c$　　（D）$a>c>b$

答案：A

解析：b 和 c 涉及三角，且 $\dfrac{1}{4}$ 在 0 附近，可用内容提要中的泰勒展开式来近似计算它们，再加以比较，

由内容提要 2，$\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$，所以 $b=\cos\dfrac{1}{4}\approx 1-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{1}{24}\times(\dfrac{1}{4})^4\approx 0.9689$，

由内容提要 2，$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}$，所以 $c=4\sin\dfrac{1}{4}\approx 4[\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{1}{4})^3]\approx 0.9896$，又 $a=\dfrac{31}{32}=0.96875$，所以 $c>b>a$.

【反思】上面用泰勒展开式近似计算 c 时，我们只取到了 x^3 这一项，这是因为在 $x=\dfrac{1}{4}$ 的情形下，下一项 $\dfrac{x^5}{5!}$ 已达 10^{-6} 量级，和前两项相比，可以忽略，故不要这一项也能比较准确地估计 c 的值.

4．（★★★）已知 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$，且 $x\ln 2=y\ln 3=z\ln 5$，则（　　）

（A）$2x<3y<5z$　　（B）$5z<2x<3y$　　（C）$3y<5z<2x$　　（D）$3y<2x<5z$

答案：D

解析：遇到连等式，考虑设 k，设 $x\ln 2=y\ln 3=z\ln 5=k(k>0)$，则 $x=\dfrac{k}{\ln 2}$，$y=\dfrac{k}{\ln 3}$，$z=\dfrac{k}{\ln 5}$，

所以 $2x=\dfrac{2k}{\ln 2}$，$3y=\dfrac{3k}{\ln 3}$，$5z=\dfrac{5k}{\ln 5}$，观察发现只需比较 $\dfrac{2}{\ln 2}$，$\dfrac{3}{\ln 3}$，$\dfrac{5}{\ln 5}$，可用近似值来估算，

因为 $\dfrac{2}{\ln 2}\approx\dfrac{2}{0.693}\approx 2.886$，$\dfrac{3}{\ln 3}\approx\dfrac{3}{1.1}\approx 2.727$，$\dfrac{5}{\ln 5}\approx\dfrac{5}{1.61}\approx 3.106$，所以 $\dfrac{3}{\ln 3}<\dfrac{2}{\ln 2}<\dfrac{5}{\ln 5}$，故 $3y<2x<5z$.